1.3.4 Početní příklady - rovnoměrně zrychlený pohyb III

Předpoklady: 010303

Pedagogická poznámka: Česká škola v současné době budí ve studentech představu, že problémy se řeší zásadně najednou. Studenti tak mají obrovské problémy v příkladech v této hodině, které vyžadují postupné řešení a rozložení na menší části, které se pak řeší samostatně. Situace se nedá změnit během této jediné hodiny a potáhne se delší dobu. Každopádně je třeba studenty hlídat a vždy v takových situacích zdůrazňovat podstatu problém (není ve fyzice) a jak postupnost řešení (můžu řešit i v případě, že na začátku nevím, jak dojít až do konce), tak rozkládání na podpříklady (teď se budeme zabývat pouze první částí pohybu). Nácvik obou dovedností chvíli trvá, ale moje zkušenosti ukazují, že při cíleném zaměření tímto směrem je možné dosáhnout značného pokroku (podstatně snáze však v matematice než ve fyzice).

Pedagogická poznámka: Studenti mají už s prvním příkladem takové problémy, že je lepší je postrkovat u tabule než nechat celé příklady řešit samostatně a pomáhat pouze v lavicích. Po každém prozrazeném kroku by však měli dostat čas na přemýšlení.

Př. 1: Strojvůdce nákladního vlaku jedoucího rychlostí 54 km/h spatřil při výjezdu ze zatáčky auto stojící na přejezdu. Přestože začal ihned brzdit, vlak do auta narazil přibližně rychlostí 36 km/h. Spočtěte zrychlení vlaku a dobu, kterou vlak brzdil, když výjezd ze zatáčky je od přejezdu vzdálen 125 m. Jak se změnilo zpomalení vlaku, když před sebou tlačil vrak automobilu ještě 25 m?

$v_1 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 36\,\mathrm{km/h} = 10\,\mathrm{m/s}$, $v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$, $s_1 = 125\,\mathrm{m}$, $s_2 = 25\,\mathrm{m}$, $a_1 = ?$, $t_1 = ?$, $a_2 = ?$

Popisovaný děj se skládá ze dvou rovnoměrně zpomalených pohybů:

- Nejdříve vlak zpomalil z rychlosti v_1 na rychlost v_2 na dráze 125 m.
- Potom rovnoměrně zpomalil z rychlosti v_2 na rychlost $v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$ na dráze 25 m.

$\Rightarrow$ Odvodíme vzorec pro výpočet zrychlení a použijeme jej pro obě části pohybu.

Z rovnice pro rychlost vyjádříme čas: $v = v_0 + at \;\Rightarrow\; \dfrac{v - v_0}{a} = t$.

Dosadíme do rovnice pro dráhu: $s = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = v_0\dfrac{v - v_0}{a} + \dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{v - v_0}{a}\right)^2$

$$s = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}$$

$$2s = \frac{2v_0 v - 2v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a}$$

$$2sa = v^2 - v_0^2$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Dosazením výsledku do vztahu pro čas získáme vztah pro jeho určení.

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}} = \frac{2s}{v + v_0}$$

1. část pohybu, platí $v_0 = v_1$, $v = v_2$ a $s = s_1$.

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s_1} = \frac{10^2 - 15^2}{2 \cdot 125}\,\mathrm{m/s^2} = -0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2s_1}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 125}{10 + 15}\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{s}$$

2. část pohybu, platí $v_0 = v_2$, $v = v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$ a $s = s_2$.

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2s_2} = \frac{0^2 - 10^2}{2 \cdot 25}\,\mathrm{m/s^2} = -2\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t = \frac{2s}{v + v_0} = \frac{2s_2}{v_3 + v_2} = \frac{2 \cdot 25}{0 + 10}\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$$

Vlak brzdil se zrychlením $-0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ po dobu 10 s, po srážce se jeho zrychlení zvětšilo čtyřikrát na hodnotu $-2\,\mathrm{m/s^2}$.

Poznámka: Ve skutečnosti se zpomalení vlaku zvětšilo méně, protože část z rychlosti 36 km/h, kterou měl, když narážel do auta, vlak ztratil při nárazu do auta tím, že ho uvedl do pohybu. Počáteční rychlost na počátku druhého zpomalování tak byla o něco menší.

Př. 2: Stojící auto nejdříve 200 metrů rovnoměrně zrychlovalo a pak jelo dvě hodiny přibližně rovnoměrně. Jakou ujelo vzdálenost, když se rozjíždělo dvacet sekund?

Pohyb auta se skládá ze dvou částí:

1. rovnoměrně zrychlený pohyb na počátku (u veličin budeme používat index *z*)

$s_z = 200\,\mathrm{m}$, $t_z = 20\,\mathrm{s}$

2. rovnoměrný pohyb auta po rozjetí (u veličin budeme používat index *r*)

$t_r = 2\,\mathrm{h}$, $s_r = ?$

Auto se pohybovalo rovnoměrným pohybem: $s_r = v_r t_r$.

Rychlost, kterou se auto pohybovalo při rovnoměrné části svého pohybu, se rovná rychlosti, kterou mělo na konci zrychlování $\Rightarrow$ rozdělíme řešení na dvě části:

- z počáteční rovnoměrně zrychlené části pohybu spočteme konečnou rychlost,
- spočtenou rychlost použijeme jako rychlost rovnoměrného pohybu v druhé části.

1. rovnoměrně zrychlený pohyb

$s_z = 200\,\mathrm{m}$, $t_z = 20\,\mathrm{s}$, $v_{0z} = 0$, $v_z = ?$

Auto se rozjíždělo z klidu $\Rightarrow$ pro zrychlený pohyb použijeme zjednodušenou soustavu:

$v_z = at_z$, $s_z = \frac{1}{2}at_z^2$.

Z první rovnice vyjádříme zrychlení a dosadíme ho do druhé: $v_z = at_z \Rightarrow a = \frac{v_z}{t_z}$.

$s_z = \frac{1}{2}at_z^2 = \frac{1}{2}\frac{v_z}{t_z}t_z^2 = \frac{1}{2}v_z t_z$

$v_z = \frac{2s_z}{t_z}$

2. rovnoměrný pohyb

Rychlost v_z je také rychlostí rovnoměrného pohybu: $v_r = v_z = \frac{2s_z}{t_z}$.

$s_r = v_r t_r = \frac{2s_z}{t_z}t_r$

$s_r = \frac{2s_z}{t_z}t_r = \frac{2 \cdot 200}{20}7200\,\text{m} = 144000\,\text{m} = 144\,\text{km}$

Auto ujelo během rovnoměrné části svého pohybu 144 km.

Poznámka: Výsledek bychom mohli také získat méně elegantně, ale přirozeněji postupným výpočtem: $v = \frac{2s_1}{t_1} = \frac{2 \cdot 200}{20} = 20\,\text{m/s} = 72\,\text{km/h}$

$s_2 = vt_2 = 72 \cdot 2\,\text{km} = 144\,\text{km}$

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci nepsat indexy, proto v případě, že se snaží dotáhnout příklad do obecného řešení dojdou k výsledku $s_r = vt = \frac{2s}{t}t = 2s$.

Myslím, že tento výsledek je poměrně přesvědčivým důkazem, že indexy svoji cenu mají.

Př. 3: Automobil jede rychlostí 60 km/h, když před něj neočekávaně vběhne z chodníku dítě. Urči vzdálenost, kterou auto ujede než zastaví, pokud řidiči trvá 0,8 s než zareaguje a začne brzdit (tomuto času se říká reakční doba a závisí na kondici a tréninku řidiče). Zpomalení auta je $6\,\text{m/s}^2$ (jeho hodnota závisí na povětrnostních podmínkách, typu povrchu a pneumatik). Jak se dráha, kterou ujede auto, změní při počáteční rychlosti 50 km/h? Jakou dráhu by urazilo auto jedoucí rychlostí 130 km/h nebo 200 km/h?

Máme určit dráhu pro několik různých rychlostí $\Rightarrow$ odvodíme si obecné řešení, aby stačilo pouze změnit dosazované hodnoty.

Pohyb auta se skládá ze dvou částí:

1. rovnoměrný pohyb auta než řidič začne brzdit (u veličin budeme používat index *r*)

$v_{r1} = 60\,\text{km/h} = 16{,}7\,\text{m/s}$, $t_r = 0{,}8\,\text{s}$, $s_r = ?$

$s_r = v_r t_r$

2. rovnoměrně zpomalený pohyb během brždění (u veličin budeme používat index *z*)

$a = -6\,\text{m/s}^2$, $v_{0z} = v_{r1} = 60\,\text{km/h} = 16{,}7\,\text{m/s}$, $v_z = 0\,\text{m/s}$, $s_z = ?$

Konečná rychlost zpomaleného pohybu je nulová $\Rightarrow$ dráhu můžeme určit pomocí rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí.

$a = 6\,\text{m/s}^2$ $\quad v_{0z} = 0\,\text{m/s}$ $\quad v_z = v_{r1} = 60\,\text{km/h} = 16{,}7\,\text{m/s}$ $\quad s_z = ?$

Použijeme zjednodušenou soustavu: $v_z = at_z$, $s_z = \frac{1}{2}at_z^2$

Z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme ho do druhé: $v_z = at_z \Rightarrow t_z = \frac{v_z}{a}$.

$$s_z = \frac{1}{2}at_z^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_z}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a\frac{v_z^2}{a^2} = \frac{v_z^2}{2a}$$

Sečteme vztahy pro obě dráhy: $s = s_r + s_z = v_r t_r + \frac{v_z^2}{2a}$.

Platí: $v_r = v_z$ (auto zpomaluje z rychlosti, kterou jelo předtím rovnoměrně)

$$s = v_r t_r + \frac{v_r^2}{2a}$$

Dosadíme do vztahu pro jednotlivé zadané rychlosti:

- $v = 60\,\text{km/h} = 16,7\,\text{m/s}$: $s_{60} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} = 16,7 \cdot 0,8 + \frac{16,7^2}{2 \cdot 6}\,\text{m} = 36,6\,\text{m}$
- $v = 50\,\text{km/h} = 13,9\,\text{m/s}$: $s_{50} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} = 13,9 \cdot 0,8 + \frac{13,9^2}{2 \cdot 6}\,\text{m} = 27,2\,\text{m}$
- $v = 130\,\text{km/h} = 36,1\,\text{m/s}$: $s_{50} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} = 36,1 \cdot 0,8 + \frac{36,1^2}{2 \cdot 6}\,\text{m} = 137,6\,\text{m}$
- $v = 200\,\text{km/h} = 55,6\,\text{m/s}$: $s_{50} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} = 55,6 \cdot 0,8 + \frac{55,6^2}{2 \cdot 6}\,\text{m} = 301,6\,\text{m}$

Automobil zastaví při počáteční rychlosti 60 km/h na dráze 36,6 m, při počáteční rychlosti 50 km/h na dráze 27,2 m.

Poznámka: Všimněte si, že ačkoliv se rychlost automobilu zmenšila o šestinu, dráha se zmenšila o více než čtvrtinu. Tento fakt je hlavním důvodem pro snížení povolené rychlosti v obcích z 60 km/h na 50 km/h.
Brzdná dráha při rychlostech nad 100 km/h je tak obrovská, že řidič téměř nemá šanci včas zastavit.

Př. 4: Stojící sportovní automobil začal rovnoměrně zrychlovat a během čtvrté sekundy svého pohybu urazil 21 m. Urči jeho zrychlení.

$\Delta s = 21\,\text{m}$ $\quad v_0 = 0\,\text{m/s}$ $\quad a = ?$

Dráhu uraženou během čtvrté sekundy můžeme určit jako rozdíl dráhy uražené od počátku pohybu do konce čtvrté sekundy (s_4) a dráhy uražené od počátku pohybu do konce třetí sekundy (s_3). Tyto dráhy můžeme určit pomocí vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb a s jejich pomocí určit zrychlení.

$$s_4 = \frac{1}{2}at_4^2 ,\ s_3 = \frac{1}{2}at_3^2$$

$$\Delta s = s_4 - s_3 = \frac{1}{2}at_4^2 - \frac{1}{2}at_3^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}a\left(t_4^2 - t_3^2\right)$$

$$\frac{2\Delta s}{t_4^2 - t_3^2} = a$$

$$a = \frac{2\Delta s}{t_4^2 - t_3^2} = \frac{2\cdot 21}{4^2 - 3^2}\,\mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

Auto se pohybovalo se zrychlením $6\,\mathrm{m/s^2}$.

Pedagogická poznámka: Diskusi o příkladu začínáme právě tím, jaký význam má dráha 21 m. Jakmile studenti zjistí, že jde o změnu dráhy, je všechno jednodušší. Jde také o dobrou ukázku příkladu, který je jen velmi těžké řešit přímo, zatímco obecné řešení je poměrně přímočaré.

Př. 5: Urči rychlost, kterou běžel D. Bailey v druhé části svého rekordního běhu na 100 m. Jeho tehdejší čas byl 9.89 s. Předpokládej, že zrychloval první tři sekundy a pak již běžel rovnoměrně.

$t = 9{,}89\,\mathrm{s}$, $s = 100\,\mathrm{m}$, $t_z = 3\,\mathrm{s}$, $v_r = ?$

Podle zadání se rekordmanův běh dá rozdělit na dvě části – část rovnoměrně zrychlenou (budeme používat index z) a část rovnoměrnou (index r). Dráhy obou částí dají dohromady 100 m, časy pak 9,89 s. K výpisu veličin pak můžeme ihned dodat $t_r = 6{,}89\,\mathrm{s}$. Výrazy pro dráhy obou částí pohybu budeme upravovat tak, aby v nich zůstaly pouze hodnoty času a konečné rychlosti zrychlené části (je zároveň rychlostí rovnoměrné části).

Dráha běhu $s = s_z + s_r$.

Platí $s_z = \frac{1}{2}at_z^2$ (rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí) a $s_r = vt_r$.

Dosadíme: $s = \frac{1}{2}at_z^2 + vt_r$. V rovnici máme dvě neznámé (a a v) $\Rightarrow$ jednu z nich musíme vyjádřit pomocí druhé: hodnotu zrychlení určíme pomocí vzorce pro rychlost zrychleného pohybu: $v = at_z \Rightarrow a = \frac{v}{t_z}$. Dosadíme:

$$s = \frac{1}{2}\frac{v}{t_z}t_z^2 + vt_r$$

$$s = \frac{1}{2}vt_z + vt_r \qquad /\cdot 2$$

$$2s = vt_z + 2vt_r$$

$$2s = v\left(t_z + 2t_r\right)$$

$$\frac{2s}{t_z + 2t_r} = v$$

$$v = \frac{2s}{t_z + 2t_r} = \frac{2\cdot 100}{3 + 3\cdot 6{,}89}\,\mathrm{m/s} = 11{,}92\,\mathrm{m/s} = 42{,}9\,\mathrm{km/h}$$

D. Bailey běžel v druhé části svého rekordního běhu rychlosti 42,9 km/h.

Shrnutí: Složitější příklady musíme řešit rozkladem na části a jejich postupným řešením.